Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 13.10.2014.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. Posmatrajmo vektorski potprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa $x_1 = (-1, 0, 1, 2)^\top$, $x_2 = (1, 2, -3, 5)^\top$, $x_3 = (1, 4, 0, 9)^\top$. Odrediti sistem homogenih linearnih jednačina za koji prostor rješenja je tačno potprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa tačno tri data vektora.

2. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao $\pi/3$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y = x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \{(1, 1)^\top, (1, -1)^\top\}$. Odredite koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

3. Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a + bt + ct^2) = a + b + c + (a + 3b)t + (a - b + 2c)t^2$$

Odrediti mu matrični prikaz z bazi $\mathcal{B} = \{1 - t, t - t^2, 1 + t^2\}$. Nadalje, odredite i po jednu bazu za $\ker(T)$ i $\operatorname{im}(T)$.

4. Za realan broj a odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore za matricu n-tog reda

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1+a \end{bmatrix}$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

(#) Posmatrajmo vektorski podprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa $x_1=(-1,0,1,2)^T$, $x_2=(1,2,-3,5)^T$ i $x_3=(1,4,9,9)^T$.
Odrediti sistem homogenih linearnih jednačina za koji prostor rešenja je tačno podprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa tačno tri data vektora.

Rj. Dati podprostor prostora $\mathbb{R}^4$ označimo sa $\mathcal{W}$ tj.

$$\mathcal{W} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\0\\9\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{im}\left(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 2 & 4\\1 & -3 & 0\\2 & 5 & 9\end{bmatrix}\right)$$

Prisetimo se: $\underline{\operatorname{im}(A)=\operatorname{im}(B) \text{ akko } A \overset{kol}{\sim} B}$.

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 2 & 4\\1 & -3 & 0\\2 & 5 & 9\end{bmatrix} \underset{III_k+I_v}{\overset{II_k+I_v}{\sim}} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 4\\1 & -2 & 1\\2 & 7 & 11\end{bmatrix} \overset{III_k+II_k\cdot(-2)}{\sim} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\1 & -2 & 5\\2 & 7 & -3\end{bmatrix} \underset{\substack{II_k\cdot\frac{1}{2}\\ III_k\cdot\frac{1}{5}}}{\overset{I_k\cdot(-1)}{\sim}}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & -1 & 1\\-2 & 7/2 & -3/5\end{bmatrix} \underset{I_k+III_k}{\overset{II_k+III_k}{\sim}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-\frac{13}{5} & \frac{29}{10} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

$$\frac{7\cdot5}{2\cdot5}-\frac{3\cdot2}{5\cdot2}=\frac{35-6}{10}=\frac{29}{10}$$

Odavde možemo zaključito da

$$\mathcal{W} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-\frac{13}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{29}{10}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right\}$$

Ovaj podprostor je dimenzije 3, pa ako posmatramo homogeni sistem linearnih jednačina $Ax=0$ gde je $A=\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{14}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n4}\end{bmatrix}$ tada ker(A) mora biti dimenzije 1. Drugim riječima sistem $Ax=0$ se može svesti na jednu jednačinu

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$$

čije je opšte rješenje oblika $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ v \\ -\frac{13}{5}s + \frac{29}{10}t - \frac{3}{5}v \end{pmatrix}$

Odavde slijedi da je

$$x_4 = -\frac{13}{5}x_1 + \frac{29}{10}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \quad / \cdot 10$$

$$10 x_4 = -26 x_1 + 29 x_2 - 6 x_3$$

$$26 x_1 - 29 x_2 + 6 x_3 + 10 x_4 = 0$$

Provjerimo da li su dati vektori $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ i $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ rješenja dobijene jednačine.

x_1: $\quad -26 + 6 + 20 = 0$

x_2: $\quad 26 - 58 - 18 + 50 = 0$

x_3: $\quad 26 - 116 + 90 = 0$

Sistem homogenih linearnih jednačina za koji je prostor rješenja generisan sa tačno tri data vektora je npr. sistem

$$26 x_1 - 29 x_2 + 6 x_3 + 10 x_4 = 0$$

$$13 x_1 - \frac{29}{2} x_2 + 3 x_3 + 5 x_4 = 0$$

$$\frac{26}{3} x_1 - \frac{29}{3} x_2 + 2 x_3 + \frac{10}{3} x_4 = 0$$

(#) Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao od $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y=x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata (matrica operatora)

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matricu koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

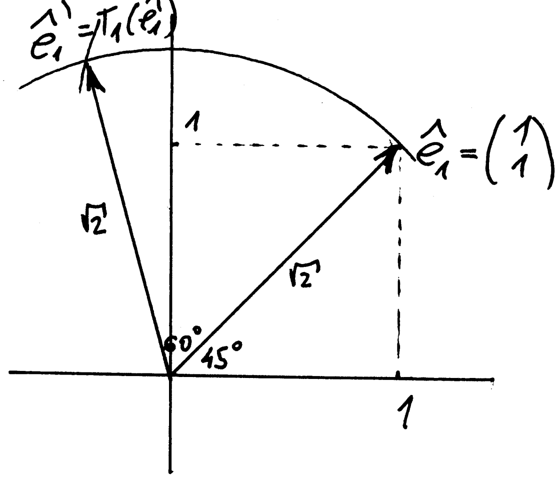
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \ldots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Ako elemente baze $\mathcal{B}$ označimo sa $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ mi u stvari tražimo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} & [T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo prvo rotaciju za $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru - i ovaj operator označimo sa T_1.

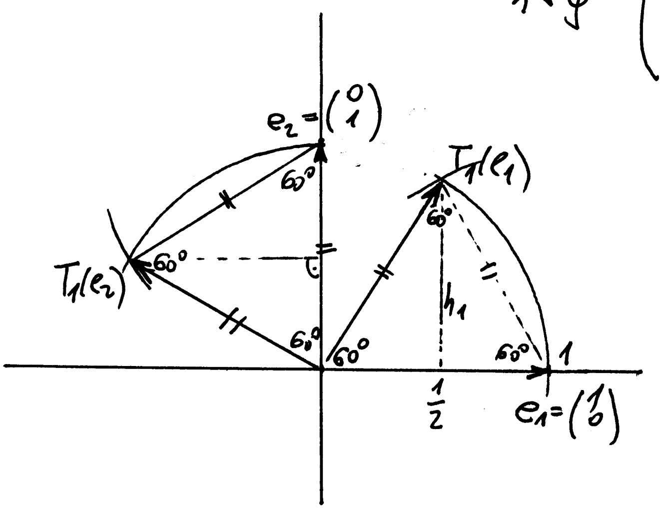


Primjetimo da je $T(\hat{e}_1)$ teško izračunati direktnim putem.

Da bi izračunali $T(\hat{e}_1)$ koristit ćemo standardnu bazu $\varphi = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ i sljedeću Teoremu:

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$ imamo $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$

$\varphi = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad [T_1]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | \\ [T_1(e_1)]_\varphi & [T_1(e_2)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$



$h_1^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ $\qquad h_2^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

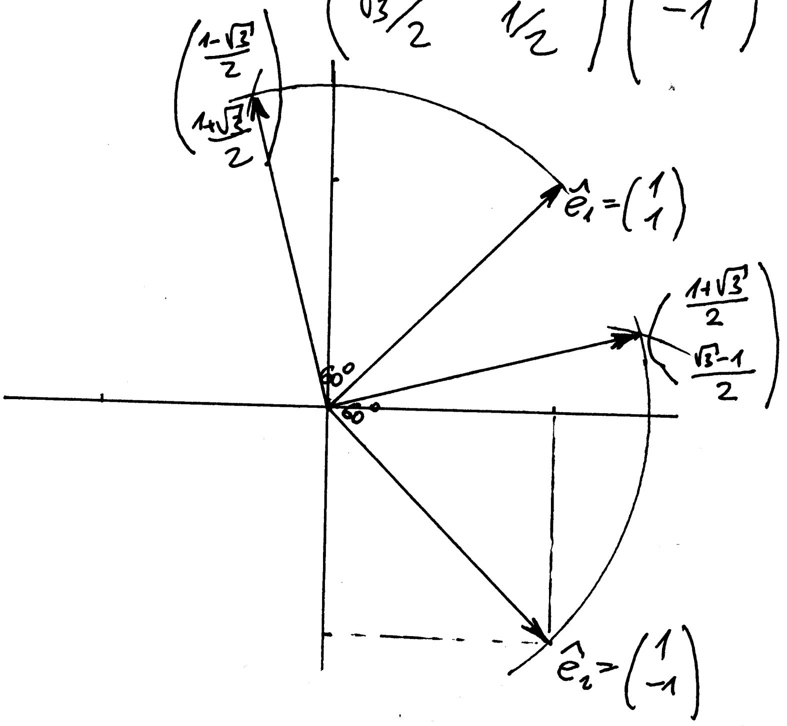
$$T_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_1)]_\varphi$$

$$T_1(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_2)]_\varphi$$

Prema tome $[T_1]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Sad imamo

$$[T_1(\hat{e}_1)]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$[T(\hat{e}_2)]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$



Dalje nije teško pokazati da se proizvoljan vektor $v \doteq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ osnom simetrijom s osom u pravoj $y=x$ preslikava u vektor $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

Prema tome $T(\hat{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$$T(\hat{e}_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Odredimo još koordinate od $T(\hat{e}_1)$ i $T(\hat{e}_2)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$[T(\hat{e}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha - \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$+$

$$2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\beta = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2}$$

$$2\beta = \sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\alpha-\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$+$

$$2\alpha=\frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2}$$

$$2\alpha=\sqrt{3} \qquad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-:$ $$2\beta=\frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\beta=-1$$

$$\beta=-\frac{1}{2}$$

$$[T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$ tražena matrica operatora

Neka je v proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$ npr. $v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\ldots=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}\cdot[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{3}\\ (\alpha+\beta)\sqrt{3}-(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$ tražene koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

(#) Zadan je linearni operator $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ s

$$T(a+bt+ct^2) = a+b+c+(a+3b)t+(a-b+2c)t^2$$

Odredite mu matrični prikaz u bazi $\mathcal{B} = \{1-t, t-t^2, 1+t^2\}$.
Nadalje, odredite i po jednu bazu za $\ker(T)$ i $\operatorname{im}(T)$.

Rj.

Prisjetimo se

Ako je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ baza vektorskog prostora V i $T \in \mathcal{L}(V, V)$ tada

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

U našem slučaju $\mathcal{B} = \{1-t, t-t^2, 1+t^2\}$

$$T(1-t) = -2t+2t^2 = -2(t-t^2) \Rightarrow [T(1-t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t-t^2) = 3t-3t^2 = 3(t-t^2) \Rightarrow [T(t-t^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1+t^2) = 2+t+3t^2.$$

$$2+t+3t^2 = \alpha(1-t) + \beta(t-t^2) + \gamma(1+t^2)$$

$$\begin{aligned} \alpha \quad\quad + \gamma &= 2 \\ -\alpha + \beta \quad\quad &= 1 \\ -\beta + \gamma &= 3 \end{aligned} \quad \dots \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 0,\ \gamma = 3$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrični prikaz operatora T u bazi $\mathcal{B}$.

Da bi smo odredili jezgro i sliku operatora T, samo za trenutak umjesto $\mathcal{P}_2$ posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^3$ i operator T' definisan sa

$$T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$T'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+3b \\ a-b+2c \end{pmatrix}$$

$$\ker(T') = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ jednu promjenjive uzimo proizv. npr. $c = 2s$, $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3s \\ s \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad \ker(T) = \operatorname{span}\{-3 + t + 2t^2\}.$$ traženo jezgro

$$\operatorname{im}(T') = \left\{ T'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{im}(A)$$

Znamo da osnovne kolone u A generišu $\operatorname{im}(A)$.

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{im}(T) = \{1 + t + t^2, \; 1 + 3t - t^2\}.$$

(#) Za realan broj a odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore za matricu n-tog reda

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \end{bmatrix}.$$

Rj:

Ako sa $\sigma(A)$ označimo skup svih različitih svojstvenih vrijednosti znamo da $\lambda \in \sigma(A)$ akko $\det(A-\lambda I)=0$.

Prije nego što počnemo računati svojstvene vrijednosti n-tog reda izračunajmo svojstvene vrijednosti dane matrice 2, 3 i 4-tog reda.

$$\begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k+II_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 2+a-\lambda & 1 \\ 2+a-\lambda & 1+a-\lambda \end{vmatrix} = (2+a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_v-I_v}{=\!=}$$

$$= (2+a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (2+a-\lambda)(a-\lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=} (3+a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{=\!=}}$$

$$= (3+a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (3+a-\lambda)(a-\lambda)^2$$

$$\begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{I_k+(II_k+III_k+IV_k)} (4+a-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[IV_v-I_v]{\substack{II_v-I_v \\ III_v-I_v}} (4+a-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (4+a-\lambda)(a-\lambda)^3$$

Sad matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je

$$\begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a-\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a-\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a-\lambda \end{vmatrix} = (n+a-\lambda)(a-\lambda)^{n-1}$$

(OSTAVLJAMO OVAJ DIO ZA VJEŽBU)

Prema tome svojstvene vrijednosti date matrice n-tog reda su $\lambda_1 = n+a$ i $\lambda_2 = a$.

Određimo svojstvene vektore matrice A.

$$\mathcal{E}_\lambda = \ker(A-\lambda I) := \{x \mid (A-\lambda I)x = 0\}$$

$\lambda_1 = n+a$

$1+a-\lambda = 1+a-(n+a) = 1-n$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \mathcal{E}_{\lambda_1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

prvi svojstveni prostor

$\lambda_2 = a$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - \cdots - x_n \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

n-1 promjenjivu uzimamo proizvoljno

$$\mathcal{E}_{\lambda_2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

drugi odgovarajući svojstveni prostor